Corrigé

1. Soient y une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $I = [0;30]$ telle que $y(0) = 0,01$ et z la fonction définie sur I par $z = \frac{1}{y}$. Alors z est dérivable sur I et, pour tout $\in I$, $z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$. Donc y est solution de $(E) : y' = 0,05y(10-y)$ avec $y(0) = 0,01$ si, et seulement si, pour tout $t \in I$, $z'(t) = -\frac{0,05y(t)(10-y(t))}{(y(t))^2} \Leftrightarrow z'(t) = -0,5 \times \frac{1}{y(t)} + 0,05$, c'est-à-dire $z'(t) = -0,5z(t) + 0,05$. Et donc si, et seulement si, z est solution de $(E') : z' = -0,5z + 0,05$. De plus $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 100$. D'où l'équivalence.

2. a. Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur I par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,1$, où C est un réel. On détermine C tel que $z(0) = 100 \Leftrightarrow C + 0,1 = 100 \Leftrightarrow C = 99,9$. Ainsi, pour tout $t \in I$, $z(t) = 99,9\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,1$ et donc $y(t) = \frac{1}{99,9\mathrm{e}^{-0,5t}+0,1}$.

   b. $y(30) = \frac{1}{99,9\mathrm{e}^{-0,5\times 30}+0,1} \approx 10$ donc environ 10 % de la population sera contaminé au bout d'un mois.